Droites du plan - Systèmes

I - Droites du plan (fait)

II - Systèmes linéaires de deux équations du 1er degré à deux inconnues

1) Définition-exemple

Définition : *$ax + by + c = 0$ est appelé équation du 1er degré à deux inconnues.*

Définition : *On appelle système d'équations du 1er degré à deux inconnues un système de la forme :*
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases} \quad \text{avec } (a;b) \neq (0;0) \text{ et } (a';b') \neq (0;0)$$

Définition : *Les solutions de ce système, si il y en a , sont des couples de nombres $(x;y)$, qui vérifient simultanément les deux équations.*

Définition : *Résoudre un tel système revient à trouver* tous *les couples $(x;y)$ qui sont solutions de ce système.*

Exemple 1 : $\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ x - 3y = -7 \end{cases}$ admet pour unique solution le couple $(-1;2)$.

Démonstration :

Exemple 2 : $\begin{cases} -2x + 3y = -3 \\ 4x + 2y = 14 \end{cases}$ admet-il pour solution le couple $(-3;1)$?

Réponse :

Propriété : *Soit (S) un système d'équations du 1er degré à deux inconnues de la forme :*
$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$
→ si $ab' - a'b = 0$ alors le système admet soit une infinité de couples solution soit aucun couple solution.
→ si $ab' - a'b \neq 0$ alors le système admet un unique couple solution.

démo et interprétation graphique : Soit $(a;b) \neq (0;0)$ et $(a';b') \neq (0;0)$.
L'ensemble $\{M(x;y)$ tel que $ax + by + c = 0\}$ est une droite (d) du plan de vecteur directeur $\vec{u}\binom{-b}{a}$.
L'ensemble $\{M(x;y)$ tel que $a'x + b'y + c' = 0\}$ est une droite (d') du plan de vecteur directeur $\vec{v}\binom{-b'}{a'}$.
Donc , l'ensemble des points $M(x;y)$ tel que $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$ est l'ensemble des points communs aux deux droites (d) et (d'). or, on sait que deux droites sont parallèles ssi leur vecteurs directeurs sont colinéaires, c'est à dire ici ssi ,
$det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow -ba' - (-b')a = 0 \Leftrightarrow ab' - a'b = 0$

Par conséquent, ...

Exemple 1 : Déterminer le nombre de solutions des systèmes suivants :

$\left\{\begin{array}{l} 2x+3y+1=0 \\ -4x-6y+11=0 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 10x+7y-2=0 \\ 2x+5y=22 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 3x+6y+12=0 \\ x+2y+6=0 \end{array}\right.$

2) Méthode de résolution d'un système

- La méthode de combinaison : on va combiner les équations pour faire disparaitre une inconnue.

$$\begin{cases} 10x + 7y - 2 = 0 \\ 2x + 5y = 22 \end{cases} \Leftrightarrow$$

• La méthode de substitution : on va isoler une inconnue dans l'une des deux équations puis on va la substituer dans l'autre équation.

$$\left\{\begin{array}{l} 10x+7y-2=0 \\ 2x+5y=22 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Ex 6,7 p 195
Ex 54,55 p 201, 57 p 201
Ex 110, 111,112,113 p 206
117p206 (géogébra) 118,119, 121 ,122 p 207
127p208
QCM p 214 + Ex bilan p 215