

# Bases de la géométrie plane

## I) Axiomes et propriétés de bases

### 1) Droites

Axiomes d'Euclide :

- Par deux points donnés il passe une et une seule droite.
  
- Si une droite passe par deux points d'un plan, alors elle est entièrement contenue dans ce plan.
- Soit une droite du plan, par un point donné extérieur à cette droite, il passe une parallèle à cette droite et une seule.

Propriétés de base :

- Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

*Utilisation :*

- Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

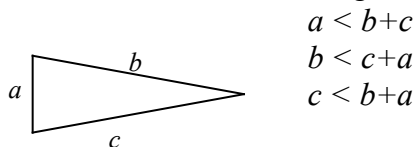
*Utilisation :*

- Si deux droites sont parallèles à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

*Utilisation :*

### 2) Inégalité triangulaire et alignement

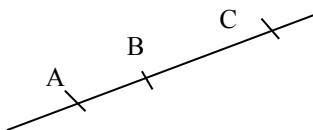
Théorème : Dans un triangle, chaque côté est plus petit que la somme des deux autres.



$$\begin{aligned} a &< b+c \\ b &< c+a \\ c &< b+a \end{aligned}$$

Théorème :

Les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés dans cet ordre **si et seulement si**  $AB + BC = AC$ .



Remarque : **si et seulement si** signifie que la **propriété directe et sa réciproque** sont vraies.

**3) Droites remarquables du triangle**

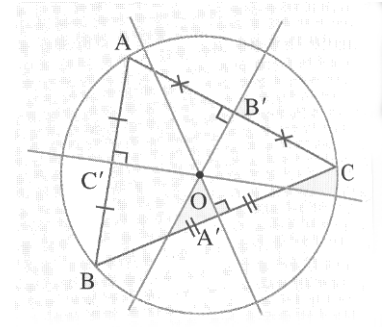
**a) Médiatrices**

Définition : La médiatrice d'un segment est la droite perpendiculaire à ce segment qui passe par son milieu.

Propriété caractéristique: un point appartient à la médiatrice d'un segment, si et seulement si il est équidistant des extrémités de ce segment.

Propriété - définition : les trois médiatrices d'un triangle sont concourantes en un point qui est le centre de cercle circonscrit au triangle.

Utilisation :

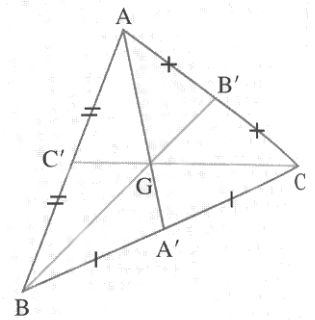


**b) Médianes**

Définition: dans un triangle, une médiane est une droite issue d'un sommet et qui coupe le côté opposé en son milieu.

Propriété - définition: les médianes d'un triangle sont concourantes en un point appelé centre de gravité, situé aux  $\frac{2}{3}$  de chaque médiane à partir du sommet.

Utilisation :

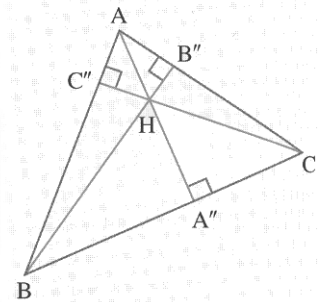


**c) Hauteurs**

Définition: une hauteur d'un triangle est une droite qui passe par un sommet et qui coupe le côté opposé perpendiculairement.

Propriété- définition: les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes en un point appelé orthocentre.

Utilisation :



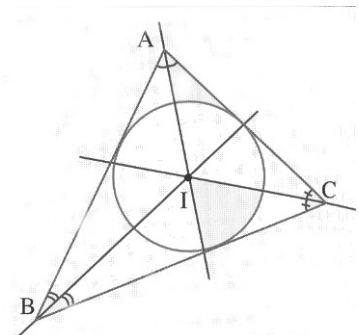
**d) Bissectrices**

Définition: la bissectrice d'un angle est la demi-droite qui partage cet angle en deux angles de même mesure.

Propriété caractéristique: un point appartient à la bissectrice d'un angle si et seulement si il est équidistant des côtés de cet angle.

Propriété - définition: les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes en un point appelé le centre du cercle inscrit à ce triangle.

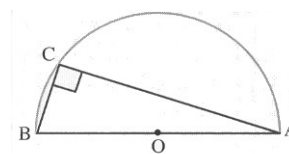
Utilisation :



## II) Triangle rectangle

### 1) Triangle rectangle et cercle

Propriété: un triangle est rectangle si et seulement si son côté le plus long est un diamètre de son cercle circonscrit.



Propriété: Si un triangle est rectangle, alors la médiane issue de l'angle droit a pour longueur la moitié de l'hypoténuse.

*Utilisation* :

Réciproque : dans un triangle, si la médiane issue du sommet opposé au côté le plus long mesure la moitié du côté le plus long, alors ce triangle est rectangle et son hypoténuse est le côté le plus long.

*Utilisation* :

### 2) Propriété de Pythagore et réciproque

Propriété: si un triangle est rectangle, alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

*Utilisation* :

Réciproque: si, dans un triangle, le carré d'un des côtés est égal à la somme des carrés des deux autres, alors ce triangle est rectangle.

*Utilisation* :

### 3) Trigonométrie

Dans un **triangle rectangle**, on définit le **cosinus d'un angle aigu** (donc pas de l'angle droit) par :

$$\cos \alpha = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\sin \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$

*Utilisation* :

Propriété : notation :  $\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$

Pour tout angle  $\alpha$  aigu, on a :  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$  et  $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$ . Démo :

### Valeurs remarquables :

Démonstration :

$\alpha$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$
$\cos \alpha$			
$\sin \alpha$			
$\tan \alpha$			

### III) Angles et rotation

#### 1) Angles :

Angles opposés par le sommet

Angles correspondants

Angles alternes internes

Angles alternes externes

#### Propriétés:

- Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors
  - les angles correspondants sont de même mesure.
  - les angles alternes internes sont de même mesure.
  - les angles alternes externes sont de même mesure.
- Deux angles opposés par le sommet sont de même mesure.

#### Propriété :

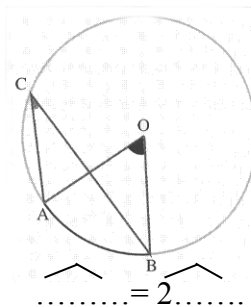
La somme des angles d'un triangle est égale à **180°**.

#### Propriété :

La somme des angles d'un quadrilatère non croisé est égale à **360°**.

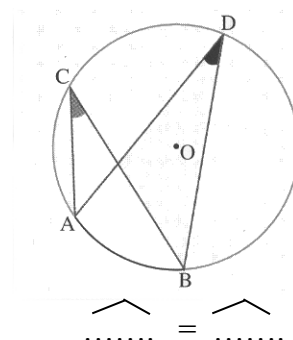
#### Propriétés angle inscrit et angle au centre:

Dans un cercle, l'angle au centre mesure le double de l'angle inscrit qui intercepte le même arc.



#### Propriété des angles inscrits :

Deux angles inscrits dans un cercle qui interceptent le même arc sont égaux.



#### 2) Rotations :

Définition : Soit  $C$  un point du plan et  $k$  un nombre réel. Pour tout  $M$  du plan, on dit que  $M'$  est image de  $M$  par la rotation de centre  $C$  et d'angle  $k$  degrés dans le sens direct, si :

- $CM = CM'$
- $\widehat{MCM'} = k$  degrés et on passe de  $M$  à  $M'$  en tournant dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

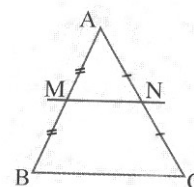
**IV) Théorème de Thales et réciproque :**

Un cas particulier : **Les théorèmes des milieux**

Théorème : Dans un triangle, la droite qui passe par les milieux de deux côtés est parallèle au troisième côté.

De plus, le segment qui joint les milieux de deux côtés mesure la moitié du troisième côté.

Théorème : dans un triangle, la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un deuxième côté coupe le troisième en son milieu.



**V) Projeté orthogonal d'un point sur une droite :**

Def :