

Exercice 1 :

On définit la suite (u_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n , $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Calculer $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$.
2. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
b. En déduire la valeur exacte de u_1 .
3. a. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il affiche en sortie le terme de rang n de la suite (u_n) où n est un entier naturel saisi en entrée par l'utilisateur.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à u la valeur ...
Traitement :	Pour i variant de 1 à ... Affecter à u la valeur ...
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher u

b. À l'aide de cet algorithme, on a obtenu le tableau de valeurs suivant :

n	0	1	2	3	4	5	10	50	100
u_n	0,693 1	0,306 9	0,193 1	0,140 2	0,109 8	0,090 2	0,047 5	0,009 9	0,005 0

Quelles conjectures concernant le comportement de la suite (u_n) peut-on émettre ?

4. a. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
b. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.
5. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n) . Démontrer que $\ell = 0$.*

Exercice 2 :

La partie C peut être traitée indépendamment des parties A et B

Partie A

On considère une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. On rappelle que, pour tout réel a strictement positif,

$$P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

On se propose de calculer l'espérance mathématique de X , notée $E(X)$, et définie par

$$E(X) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt.$$

On note \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels.

On admet que la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(t) = -\left(t + \frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda t}$ est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(t) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

1. Soit x un nombre réel strictement positif. Vérifier que

$$\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \left(-\lambda x e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} + 1 \right).$$

2. En déduire que $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Partie B

La durée de vie, exprimée en années, d'un composant électronique peut être modélisée par une variable aléatoire notée X suivant la loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$. La courbe de la fonction densité associée est représentée en **annexe 2**.

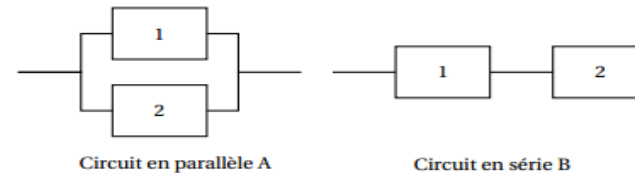
1. Sur le graphique de l'annexe 2 (à rendre avec la copie) :
a. Représenter la probabilité $P(X \leq 1)$.
b. Indiquer où se lit directement la valeur de λ .
2. On suppose que $E(X) = 2$.
a. Que représente dans le cadre de l'exercice la valeur de l'espérance mathématique de la variable aléatoire X ?
b. Calculer la valeur de λ .
c. Calculer $P(X \leq 2)$. On donnera la valeur exacte puis la valeur arrondie à 0,01 près. Interpréter ce résultat.
d. Sachant que le composant a déjà fonctionné une année, quelle est la probabilité que sa durée de vie totale soit d'au moins trois années? On donnera la valeur exacte.

Partie C

Un circuit électronique est composé de deux composants identiques numérotés 1 et 2. On note D_1 l'évènement « le composant 1 est défaillant avant un an » et on note D_2 l'évènement « le composant 2 est défaillant avant un an ».

On suppose que les deux évènements D_1 et D_2 sont indépendants et que $P(D_1) = P(D_2) = 0,39$.

Deux montages possibles sont envisagés, présentés ci-dessous :



1. Lorsque les deux composants sont montés « en parallèle », le circuit A est défaillant uniquement si les deux composants sont défaillants en même temps. Calculer la probabilité que le circuit A soit défaillant avant un an.
2. Lorsque les deux composants sont montés « en série », le circuit B est défaillant dès que l'un au moins des deux composants est défaillant. Calculer la probabilité que le circuit B soit défaillant avant un an.*

--	--