

## Inéquations

### I) Résolution algébrique d'inéquations :

**Rappel :** Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue  $x$ .

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de  $x$  qui vérifient cette inégalité.

Il s'agit d'un ensemble de nombres.

#### 1) Inéquations équivalentes :

**Définition :** On dit que deux équations sont équivalentes ssi elles ont le même ensemble de solutions.

En utilisant la propriété suivante, on obtient des inéquations équivalente :

#### **Propriété :**

- On ne change pas l'ordre d'une inégalité quand on ajoute ou soustrait le même nombre aux deux membres d'une inégalité.

- On ne change pas l'ordre d'une inégalité quand on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre POSITIF, non nul.

- On change l'ordre d'une inégalité quand on multiplie ou divise les deux membres d'une inégalité par un même nombre NEGATIF, non nul.

#### 2) Inéquations du premier degré :

Exemples:

Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur une droite graduée :

1)  $2x+3<0$

2)  $-2x+3<0$

1) Correction :

$$\begin{aligned} & 2x + 3 < 0 \quad \text{On soustrait 3.} \\ \Leftrightarrow & 2x < -3 \\ \Leftrightarrow & x < \frac{-3}{2} \quad \text{On divise par 2.} \end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à .....  
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc tous les nombres de l'intervalle : .....  
On note :  $S = \{x \in \quad ; \quad \}$

2) Correction :

$$\begin{aligned} & -2x + 3 < 0 \quad \text{On soustrait 3.} \\ \Leftrightarrow & -2x < -3 \\ \Leftrightarrow & x > \frac{-3}{-2} \quad \text{On divise par (-2).} \\ \Leftrightarrow & x > \frac{3}{2} \quad \text{On simplifie.} \end{aligned}$$

Les solutions sont tous les nombres strictement ..... à .....  
L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc tous les nombres de l'intervalle : .....  
On note :  $S = \{x \in \quad ; \quad \}$

### 3) Inéquations du second degré :

Méthode : Pour résoudre une inéquation de degré supérieur ou égal à deux :

- on transpose pour obtenir l'un des deux membres égal à 0.
- on factorise le membre qui n'est pas 0.
- on étudie le signe de chaque facteur.
- on utilise un tableau de signe pour étudier le signe du produit.
- on trouve les solutions en utilisant la dernière ligne du tableau.

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante :  $(3-6x)(x+2) < 0$

Le signe de  $(3-6x)(x+2)$  dépend du signe de chaque facteur  $(3-6x)$  et  $(x+2)$ .

On résout par exemple :

$$\begin{aligned}
 & 3 - 6x > 0 \quad (+) \quad \text{et} \quad x + 2 < 0 \quad (-) \\
 \Leftrightarrow & -6x > -3 & \Leftrightarrow & x < -2 \\
 \Leftrightarrow & 6x < 3 \\
 \Leftrightarrow & x < 1/2
 \end{aligned}$$

On résume cela dans un même tableau de signes.

$x$	$-\infty$	$-2$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$	
$3 - 6x$		+	+	0	-
$x + 2$	-	0	+		+
$(3 - 6x)(x + 2)$	-	0	+	0	-

On obtient la dernière ligne ( le produit) en appliquant la règle des signes.

On en déduit que  $(3-6x)(x+2)$  est positif pour tout  $x \in ]-2; \frac{1}{2}[$  et

négatif pour  $x \in ]-\infty; -2[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[$  .

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc :  $\{x \in ]-\infty; -2[ \cup ]\frac{1}{2}; +\infty[\}$  .

**4) Inéquation quotient :**

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation suivante : .

L'équation n'est pas définie pour  $3x - 2 = 0$ , soit  $x =$  .

Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de dépend du signe des expressions et .

$2 - 6x = 0$  équivaut à  $x =$  .

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

$x$	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$2 - 6x$	+	0	-	-	
$3x - 2$	-	-	0	+	
$\frac{2 - 6x}{3x - 2}$	-	0	+		-

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour

$x =$  .

On en déduit que pour .

L'ensemble des solutions de l'inéquation est ..

## **II) Vérification à l'aide d'une résolution graphique.**

### Méthode :

- On trace les courbes des fonctions.
- Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient